

suggestive paper in the *Phil. Mag.*, September 1929, which explains D. M. Bose's hypothesis that it is only the rotating vector r which is responsible for the magnetism of the ions of transitional elements in a similar way).

There seems to be no experimental evidence in existence which can be utilised in support of the above hypothesis. The absorption spectra of none of these compounds have been studied in the vapour state (the work of Franck and his school being confined mostly to the study of alkali

halogenides). The emission spectra of some of these salts have been studied, but it is difficult to draw any conclusion from them. Other interesting experiments may also be devised to test the above hypothesis. Some of them are in progress.

Department of Physics,
Allahabad University,
Dec. 27, 1929.

49. ÜBER DIE VERTEILUNG DER INTENSITÄT UNTER DIE FEINSTRUKTURKOMPONENTEN DER SERIENLINIEN DES WASSERSTOFFS UND DES IONISIERTEN HELIUMS NACH DER DIRACSCHEN ELEKTRONENTHEORIE.

VON M. SAHA UND A. C. BANERJI

(*Zeits. f. Physik*, **68**, 704, 1931)

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 5 Oktober 1930)

1. *Eipleitung.* Die Feinstruktur der Linien des Wasserstoffs und ionisierten Heliums sowie die Intensitätsverteilung unter die Feinstrukturkomponenten sind in älterer und neuester Zeit Gegenstand der Untersuchungen vieler hervorragender Forscher gewesen¹. Auch heute ist das Interesse daran noch nicht erloschen, da L. Goldstein in einer vor kurzem im *Journal de Physique* (Dezember 1929) erschienenen Arbeit die Intensitätsverteilung unter die Feinstrukturkomponenten von $H\alpha$ und $\lambda=4686$ des He^+ nach der relativistischen Wellenmechanik von Dirac untersuchte und recht auffallende Abweichungen gegenüber den Beobachtungen fand. Das Ergebnis schien aus zwei Gründen einigermaßen überraschend: 1. ist die Diracsche Elektronentheorie so erfolgreich in der Deutung der Dublizität und der Feinstruktur der H-Linien gewesen, dass an ihr Versagen in der Intensitätsberechnung nur schwer zu glauben ist, und 2. haben Sommerfeld und Unsöld in der oben genannten Arbeit eine Theorie der Intensitätsverteilung auf Grund von Schrödingermechanik und statistischen Überlegungen ausgearbeitet, mit deren Hilfe sie in sehr befriedigender Form viele der voneinander abweichenden Beobachtungen der Intensitätsverteilung auf die Feinstrukturkomponenten der $H\alpha$ -Linie und von $\lambda=4686$ des He^+ erklären konnten. Die Verfasser der vorliegenden Arbeit sind mit dieser selben Frage schon vor der Veröffentlichung der Goldsteinschen Arbeit beschäftigt gewesen, aber ihre Ergebnisse stehen mit den

Versuchsergebnissen in ausgezeichneter Übereinstimmung, ebenso wie mit den Ergebnissen von Sommerfeld und Unsöld. Wir haben die Diracsche Theorie in der von Weyl und Darwin² gegebenen Form benutzt. Die vorliegende Arbeit enthält nur die Endergebnisse, da die Wiedergabe aller mathematischen Schritte zu umfangreich und langweilig werden dürfte.

2. *Historische Skizze der Frage.* Die Theorie für die Feinstruktur der H-Linien ist bekanntlich zuerst von Sommerfeld auf Grund der Elektronenniveautheorie ausgearbeitet worden. Ist ein Elektronenniveau durch die Gesamtquantenzahl n und die azimutale Quantenzahl k gegeben, so ist seine Energie durch

$$\nu_{nk} = -Rz^2 \left[\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha^2}{n^4} \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) \dots \right] \quad (1)$$

ausgedrückt. (Die Energie des Niveaus ist gleich $h\nu_{nk}$. α ist die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante $\left(\frac{2\pi e^2}{ch} \right)$. Die Frequenz einer Emissionslinie ist durch

$$\nu = Rz^2 \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right] + R\alpha^2 z^2 \left[\frac{1}{n^4} \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{n'^4} \left(\frac{n'}{k'} - \frac{3}{4} \right) \right] = \nu_0 + \Delta\nu \quad (2)$$

gegeben, wo

$$\left. \begin{aligned} \nu_0 &= Rz^2 \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right] \\ \Delta\nu &= R\alpha^2 z^2 \left[\frac{1}{n^4} \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{n'^4} \left(\frac{n'}{k'} - \frac{3}{4} \right) \right] \end{aligned} \right\} (2')$$

¹Für einen zusammenfassenden Bericht vgl. A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, 4. Aufl., S. 439 ff. Die dort vertretenen Ansichten sind inzwischen abgeändert worden; vgl. A. Sommerfeld u. A. Unsöld, *Zeit. f. Phys.* **36**, 259, 1926; **38**, 237, 1926.

²H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Kap. 4, S. 1
C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc. (A)* **118**, 654, 1928.

Die Feinstrukturkomponenten erhält man, indem man k und k' alle möglichen Werte verleiht und im jede Kombination $\Delta \nu$ ausrechnet. Im folgenden geben wir die Komponenten für H_α wieder:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } 2P_{3/2} \quad 2_2 \leftarrow 3_3 \quad 3D_{3/2} & \text{(I)} \\
 \text{b) } 2P_{1/2} \quad 2_1 \leftarrow 3_2 \quad 3D_{3/2} & \text{(II)} \\
 \quad \quad \quad 2S_{1/2} \quad \quad \quad 3P_{3/2} & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 3_1 \quad 3P_{1/2} & \text{(III)} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 3S_{1/2} &
 \end{array}$$

Jedoch zeigte Landé-später, dass die Feinstruktur in Wirklichkeit nicht relativistischen, sondern magnetischen Ursprungs ist, d.h. dass sie darauf beruht, dass das Elektron ein magnetisches Moment besitzt. Nach der Landéschen Theorie, die Sommerfeld und Unsöld³ übernommen und durch die von Goudsmit und Uhlenbeck stammende Annahme rotierender Elektronen auf eine anschaulichere Grundlage gestellt haben, ist der Bau des H-Spektrums genau analog dem der Alkalispektren. Heisenberg und Jordan⁴ haben der Hypothese die strenge mathematische Fundierung gegeben sie zeigten vermittelst der Matrizenmechanik, dass sich für solche Glieder wie 3_{32} und 3_{22} (d.h. $3D_{3/2}$ und $3P_{3/2}$), die dieselbe innere Quantenzahl besitzen, derselbe Energiewert wie für den Sommerfeldschen 3_2 -Term ergibt. Die auf dieser Grundlage berechnete Struktur gibt die Fig. 1 für H_α in der Bezeichnung von Russell und Saunders wieder.

In der ersten Spalte sind die Niveaus nach dem Russell-Saunderschen Schema mit ihren inneren Quantenzahlen bezeichnet. Die zweite Spalte enthält die Diracschen k -Werte für jeden Term. Die dritte Spalte gibt die Schrödingerschen l -Werte. In der vierten Spalte findet sich die

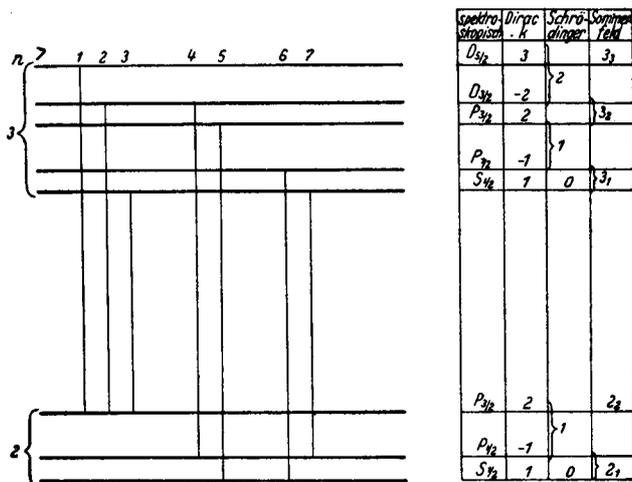


FIG. 1

ursprüngliche Sommerfeldsche Zuordnung. $D_{3/2}$ und $P_{3/2}$ haben denselben Energiewert wie das Sommerfeldsche 3_2 , entsprechend $P_{1/2}$ und $S_{1/2}$ denselben wie 3_1 .

Im Gegensatz zum ursprünglichen Sommerfeldschen Schema besteht die H_α -Linie nunmehr aus sieben anstatt wie bei Sommerfeld aus drei Komponenten; da aber die Energiewerte von $D_{3/2}$ und $P_{3/2}$ sowie von $P_{1/2}$ und $S_{1/2}$ zusammenfallen, so fallen auch einige der Komponenten aufeinander. So fällt zusammen

- Ia mit (1)
- IIa „ (2)
- (nach Sommerfeld verboten)
- IIIa mit (3)
- IIb „ (4, 5)
- IIIb „ (6, 7)

Lage und beobachtete Intensität dieser Linien auf einer Frequenzskale zeigt die Fig. 2.

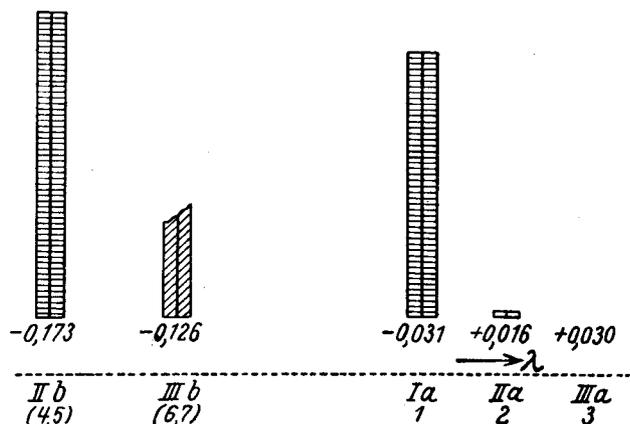


FIG. 2

Komponenten von H_α
 Abszisse: Wellenlänge. Ordinate: Intensität
 Die Komponenten sind an den ihnen zugehörigen Wellenlängen eingezeichnet.

In Wirklichkeit können im Versuch nur die rote (1) und die violette Komponente (4, 5) deutlich unterschieden werden.

Es ist klar, dass die Intensitäten der Komponenten, die irgend einem Multiplett zugeordnet werden können, die Intensitätsformel von Ornstein-Burger-Sommerfeld befriedigen müssen. Wir stellen daher die Komponenten von H_α in der Form der Multipletts dar, aus denen diese Linie zusammengesetzt ist (Fig. 3).

Man sieht, dass die H_α -Linie aus drei Multipletts besteht: 1. einem $2P-3D$ -Multiplett, das aus den Linien (1, 2, 4) besteht, die in kleinen Zahlen in den oberen rechten Ecken jedes Quadrats angegeben sind. Ihre Intensitäten sollten sich wie 9:1:5 verhalten; 2. einem $2S-3P$ -Multiplett, bestehend aus den Linien (5, 6); das Intensitätsverhältnis sollte 2:1 betragen; 3. einem $2P-3S$ -Multiplett, das aus den Linien (3, 7) besteht. Das Intensitätsverhältnis sollte 2:1 sein.

³A. Sommerfeld u. A. Unsöld, *Zeit. f. Phys.* **36**, 259, 1926.

⁴W. Heisenberg u. P. Jordan, *ebenda*, **37**, 263, 1926.

		1	-1	2	-2	3
	2 3	$S_{1/2}$	$P_{1/2}$	$P_{3/2}$	$D_{3/2}$	$D_{5/2}$
1	$S_{1/2}$		1 [6] 0,110	2 [5] 0,031		
-1	$P_{1/2}$	1 [7] 0,110			5 [4] 0,031	
2	$P_{3/2}$	2 [3] 0,031			1 [2] 0,021	9 [1] 0,005

FIG. 3

Darstellung von H_a als Kombination dreier Multipletts.

Zum Vergleich von Versuchsdaten mit irgendwelchen theoretischen Ergebnissen müssen wir das Verhältnis der Intensitätseinheiten in den drei Multipletts kennen. Wir können diese Einheiten als I_{2P-3D} , I_{2S-3P} und I_{2P-3S} definieren. Zum Beispiel besteht die rote Komponente von H_a praktisch aus (1) des $2P-3D$ -Multipletts, während die violette Komponente aus (4) von $2P-3D$ und (5) von $2S-3P$ zusammengesetzt ist. Daher ist $I_{\text{violett}}/I_{\text{rot}} = (5 I_{2P-3D} + I_{2S-3P})/9 I_{2P-3D}$. Ohne I_{2S-3P}/I_{2P-3D} zu erkennen, können wir keinen Vergleich anstellen.

Die kleinen Zahlen (0,005, 0,020 usw.) geben die von Goldstein gefundenen relativen Intensitäten. Ein Blick auf die Tabelle zeigt, dass die Abweichung von den Versuchsergebnissen recht krass ist. Die Komponente (1) wird hier zur schwächsten, während sie die stärkste sein sollte, und die Regel von Ornstein-Burger-Sommerfeld ist gröblich verletzt.

Das Vorgehen von Sommerfeld und Unsöld⁵. Dagegen finden Sommerfeld und Unsöld von der Schrödingerschen Form der Wellenmechanik und von statistischen Überlegungen ausgehend, gute Übereinstimmung mit den Hansenschen⁶ Ergebnissen für H_a und Paschens⁷ neuen Messungen an $\lambda=4686$. Sie benutzen die Schrödingersche Mechanik, die, wenn sie auch das Dublizitätsphänomen nicht zu erklären vermag, doch einen Grenzfall der Diracschen Gleichungen für $c \rightarrow \infty$ darstellt. Es ergibt sich, dass jedes der drei Multipletts $I_{2P-3D} : I_{2S-3P} : I_{2P-3S}$, aus denen H_a zusammengesetzt ist, als eine einfache Linie angeselien wird, und die Gesamtenergie wird genau durch das benutzte Verfahren gegeben. Sie finden

$$\text{Gesamtintensität von } 2P-3D : 2S-3P : 2P-3S \\ 1 : \frac{5}{24} : \frac{5}{2^8}$$

Nun verhalten sich die statistischen Gewichte der drei Multipletts wie 15:3:3. Daher verhalten sich die Intensitätseinheiten der drei Multipletts wie $\frac{1}{15} : \frac{5}{24 \cdot 3} : \frac{5}{2^8 \cdot 3}$ oder wie 1:1,04:0,09.

⁵A. Sommerfeld u. A. Unsöld, l. c.

⁶G. Hansen. *Ann. d. Phys.* **78**, 558, 1925.

⁷F. Paschen, *ebenda*, **82**, 689, 1927.

Somit ist die Intensität der roten Komponente gleich 9, die violetten Komponente gleich $5I_{PD} + 2I_{SP} = 7,08$.

Für die He^+ -Linie $\lambda=4686$ gehen Sommerfeld und Unsöld ganz analogen Weg und kommen zu Ergebnissen, die sich in guter einstimmung mit Beobachtungsdaten erwiesen haben.

Verfahren dieser Arbeit. Wie wir schon oben erwähnten, sind wir direkt von der Diracschen Elektronentheorie in der Darwin-Weylschen Darstellung ausgegangen und haben die Übergangswahrscheinlichkeiten z , $x+iy$, $x-iy$ für jede Feinstrukturkomponente abgeleitet. Das Verfahren liefert Formeln, die die Intensitäten der magnetischen Komponenten jeder Feinstrukturlinie wiedergeben, wie schon Heisenberg und Jordan⁸ und auch Dirac⁹ gefunden haben. Die Gesamtintensität jeder Feinstrukturlinie ist durch $\sum z^2 + \sum (x \pm iy)^2$ gegeben, wobei die Summation über die Eigenwerte von m erstreckt wird, was einfach $3\sum z^2$ gibt. Werden die Intensitäten der irgendein Multiplett (z. B. 1, 2, 4, die das $2P-3D$ -Multiplett bilden) bildenden Linien verglichen, so erhält man ihr Verhältnis genau in der von der Ornstein-Burger-Sommerfeldschen Regel geforderten Form (nämlich 9:1:5 im eben gegebenen Falle). Die Verhältnisse der Intensitätseinheiten werden berechnet und ergeben genau die von Sommerfeld und Ornstein berechneten Werte sowohl für H_a als auch für $\lambda=4686$.

3. Skizzierung der mathematischen Theorie. Wir sind im grossen ganzen der Methode und der Bezeichnungsweise von Weyl gefolgt, mit geringen Änderungen hier und dort. Die von Weyl für die ψ -Funktion gefundenen Ausdrücke können folgendermassen geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{2V}{r} y_{k-1} - i \frac{W}{kr} y_k, & \psi_3 &= \frac{2V}{r} y_{k-1} + i \frac{W}{kr} y_k, \\ \psi_2 &= \frac{2(k-m-1)}{r} y_{k-1}^{m+1} + i \frac{(k+m+1)}{k} \frac{W}{r} y_k^{m+1}, \\ \psi_4 &= \frac{2(k-m-1)}{r} y_{k-1}^{m+1} - i \frac{(k+m+1)}{kr} W y_k^{m+1}, \end{aligned} \right\} (3)^{10}$$

ψ_3 ist zu ψ_1 , ψ_4 zu ψ_2 konjugiert. Hier ist

$$\left. \begin{aligned} y_k^m &= e^{im\phi} (\sin \Theta)^{-m} D^{k-m} (1-z^2)^k \\ D &= \left(\frac{d}{dz} \right), & z &= \cos \Theta \end{aligned} \right\} (4)$$

$$V = e^{-\beta r} F, \quad W = e^{-\beta r} G. \quad (5)$$

⁸W. Heisenberg u. P. Jordan, *Zeit. f. Phys.* **37**, 263, 1926.

⁹P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London (A)* **117**, 610, 1928.

¹⁰Diese Lösung unterscheidet sich von der ursprünglich von Darwin gegebenen und dann von Fraenkel (Wellenmechanik S. 284), Goldstein usw. wiedergegebenen in unwesentlichen Hinsichten, wovon man sich leicht durch einen Vergleich überzeugen kann.

F und G sind Polynome der Form:

$$\left. \begin{aligned}
 F &= r^{\mu_0} \sum_{s=0}^{s=n_r} a_{\mu_0+s} r^s, & G &= r^{\mu_0} \sum_{s=0}^{s=n_r} b_{\mu_0+s} r^s, \\
 \mu_0 &= \sqrt{k^2 - \alpha^2}, & \alpha &= \frac{2\pi e^2}{ch} z, \quad (\text{Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante}) \\
 \nu_0 &= \frac{m_0 c^2}{h}, & \sqrt{\nu_0^2 - \nu^2} &= \frac{1}{\alpha} [n_r + \sqrt{k^2 - \alpha^2}], \\
 \beta &= \frac{\sqrt{\nu_0^2 - \nu^2}}{c} = \frac{z}{a(n_r + k)} = \frac{z}{an} \quad (\text{angenähert}).
 \end{aligned} \right\} (5')$$

n_r = radiale Quantenzahl,
 n = Gesamtquantenzahl,
 a = normaler Wasserstoffradius.

Für a_{μ_0+s} haben wir die folgenden Rekursionsformeln:

$$\left. \begin{aligned}
 a_{\mu_0+s+1} &= -a_{\mu_0+s} \frac{2(n_s - s)}{(s+1)(2k+s)} \cdot \frac{1}{an} \\
 b_{\mu_0} &= a_{\mu_0} \frac{\alpha}{\mu_0 + k}
 \end{aligned} \right\} (6)$$

Daher sind G und infolgedessen W gegen V kleine Grössen; $|W|$ ist tatsächlich von der Grössenordnung $\alpha |V|$.

Mit Hilfe der Rekursionsformeln für die Koeffizienten a können wir V in einer Form hinschreiben, die für manche Berechnungen brauchbarer ist:

$$V = a_0 Q^{\mu_0} e^{-\frac{\rho}{2}} L_{n+k-1}^{2k-1}(Q) \quad (7)$$

mit $Q = 2\beta r = \frac{2s}{n}, \quad s = \frac{r}{a}.$

$L_{n+k-1}^{2k-1}(Q)$ ist das von Schrödinger eingeführte Laguerresche Polynom.

Die einzige unbekannte Konstante ist a_0 . Diese erhält man durch Normierung. Es sei

$$\lambda_{km} = \psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2 + \psi_3 \bar{\psi}_3 + \psi_4 \bar{\psi}_4, \quad (8)$$

dann müssen wir setzen:

$$\int \lambda_{km} d\Omega = 1, \quad (9)$$

Dies liefert uns den Wert für a_0 .

Lösungen für negative Diracsche k -Werte. Man kann leicht zeigen, dass

$$\left. \begin{aligned}
 \psi_1(-k) &= \frac{V}{kr} y_k^m - i \frac{2W}{r} y_{k-1}^m \\
 \psi_2(-k) &= -\frac{V(k+m+1)}{kr} y_{k+1}^{m+1} - i \frac{2W}{r} (k-m-1) y_{k-1}^{m+1}
 \end{aligned} \right\} (10)$$

ψ_3 ist zu ψ_1 konjugiert und ψ_4 zu ψ_2 .

Da V die Gleichung

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k-1)}{r^2} \right] V + UV = 0 \quad (11)$$

befriedigt, ist $V(-k) = V(k+1)$.

Die Normierung muss auf genau die gleiche Weise wie oben ausgeführt werden.

Übergangswahrscheinlichkeiten. Anfangs- und Endzustand seien durch die Zahlen (k, m) und (k', m') gegeben und ψ, ψ' seien die entsprechenden ψ -Funktionen. χ bedeute den Ausdruck

$$\chi = \psi_1 \bar{\psi}'_1 + \psi_2 \bar{\psi}'_2 + \psi_3 \bar{\psi}'_3 + \psi_4 \bar{\psi}'_4 \quad (12)$$

Wir wollen jetzt die mittleren Werte für die Verschiebungen

$$z = r \cos \vartheta, \quad x + iy = r \sin \vartheta \cdot e^{i\varphi}, \quad x - iy = r \sin \vartheta \cdot e^{-i\varphi}$$

berechnen. Dem Übergang $(k, m) \rightarrow (k', m')$ entsprechend haben wir

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{z} &= \int r \cos \vartheta \chi d\Omega \\
 \overline{x + iy} &= \int r \sin \vartheta e^{i\varphi} \chi d\Omega \\
 \overline{x - iy} &= \int r \sin \vartheta e^{-i\varphi} \chi d\Omega.
 \end{aligned} \right\} (13)$$

Jedes dieser Integrale lässt sich in der Form $R \cdot \Theta \cdot \Phi$ schreiben, wo R, Θ und Φ Integrale über r, ϑ bzw. φ allein bedeuten.

Es ist unnötig, die Schritte zu wiederholen, durch die bewiesen wird, dass

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{z} \neq 0 &\text{ nur für } m' = m \\
 \overline{x + iy} \neq 0 &\text{ ,, ,, } m' = m + 1 \\
 \overline{x - iy} \neq 0 &\text{ ,, ,, } m' = m - 1.
 \end{aligned} \right\} (14)$$

Es ist dies das Auswahlprinzip für die magnetische Quantenzahl m .

Eine Betrachtung der Integrale Θ zeigt, dass Θ nur dann ungleich Null ist, wenn

$$k' = (k-1, k+1), (k-3, k+3), (k-5, k+5)$$

oder

$$k' = -k, -k \pm 2r \text{ usw.} \quad (15)$$

Dies Ergebnis entspricht dem Auswahlprinzip für die innere Quantenzahl $j = j+1, j-1, j$. In dieser Arbeit betrachten wir nur die Fälle

$$k = k+1, k-1, -k.$$

Das Integral $[R]$: In unseren Rechnungen haben wir meistens W vernachlässigt und $\mu_0 = \sqrt{k^2 - \alpha^2} = k$ gesetzt. Mit dieser Näherung erhalten wir

$$R = [r] = \frac{\int_0^\infty V(n, k) V(n', k') r dr}{\sqrt{\int_0^\infty V^2(n, k) dr \cdot \int_0^\infty V^2(n', k') dr}} \quad (16)$$

Der Wert für $[r]$ ist gegeben durch

$$[r] = \left\{ \frac{|n_r}{(n+k-1)^3} \frac{|n_r}{|n'+k'|} = 1 \right\}^{1/2} \frac{a \cdot 2^{k+k'}}{n^{k+1} n'^{k'+1}} \cdot S, \quad (16a)$$

wo S das von Sommerfeld¹¹ eingeführte Integral

$$S = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)s} L_{n+k-1}^{2k-1} \left(\frac{2s}{n}\right) L_{n'+k'-1}^{2k'-1} \left(\frac{2s}{n'}\right) s^{k+k'+1} ds \quad (17)$$

ist. Solange k und k' positiv sind, ergeben sich bei der Anwendung dieser Formeln keinerlei Schwierigkeiten. Wenn aber k negativ ist, treten einige Schwierigkeiten auf,

¹¹ Vgl. Wellenmechanischer Ergänzungsband S. 93.

wenn man eine allgemeine Formel hinschreiben will, Wir müssen dann $-k$ durch $k+1$ ersetzen; sicherer ist es aber, jeden Fall einzeln zu behandeln. Wir haben daher die Übergangswahrscheinlichkeiten für jeden der sechs Fälle $k \rightarrow k-1$, $k \rightarrow k+1$, $k \rightarrow -k \rightarrow -k+1$, $-k \rightarrow -k-1$, $-k \rightarrow k$ einzeln berechnet.

Die Werte für \bar{z} , $x+iy$, $x-iy$ sind für die verschiedenen \bar{U} , gänge im folgenden zusammengestellt:

Die Faktoren $\sqrt{(k+m)(k-m-1)}$ usw. sind im wesentlichen mit den entsprechenden Ausdrücken in j und m identisch, die Heisenberg und Jordan¹² aus der Matrizenmechanik abgeleitet haben (vgl. Birtwhistle, New Quantum Theory, Kap XV, S. 122). Aber in den von Heisenberg und Jordan gefundenen Übergangswahrscheinlichkeiten ist $F_k^k \dots$ bezüglich der Koeffizienten B, C, A unbestimmt gelassen. Hier werden die F durch bekannte Größen dargestellt und berechnet.

Bezüglich der Ausdrücke für F kann die folgende erklärende Bemerkung von Nutzen sein.

n_r = radiale Quantenzahl im Sommerfeldschen Sinne. d. h. $n_r = n - k$, wenn die Diracsche k -Zahl $+k$ ist, und $n_r = n - (k+1)$, wenn die Diracsche k -Zahl $-k$ ist. So ist $k=2$ für 3 $P_{1/2}$, hierfür ist $n_r=1$; $k=-1$ für 3 $P_{1/2}$, auch hierfür ist $n_r=1$.

n' = Gesamtquantenzahl des Endzustandes (2 für H_α).

n'_r = radiale Quantenzahl des Endzustandes.

¹² W. Heisenberg u. P. Jordan, *Zeit. f. Phys.* **37**, 263, 1926.

Intensitätsberechnung. Die möglichen Werte der magnetischen Quantenzahl m sind

$$k-1, k-2, \dots -k,$$

wenn die Diracsche Quantenzahl k oder $-k$ ist.

Die Ausdrücke für \bar{z} , $x+iy$, $x-iy$ setzen uns in den Stand, die Intensitäten der magnetischen Komponenten zu berechnen, in die irgendeine einzelne Linie aufspaltet, wenn sie in einem Magnetfeld angeregt wird: \bar{z} entspricht der dem Felde parallel schwingenden Komponente, $x+iy$ und $x-iy$ beziehen sich auf die rechts und links zirkular polarisierten Komponenten.

Ohne Magnetfeld fallen alle diese Komponenten zu einer einzigen Linie zusammen. Für diesen Fall müssen wir die Summe der Intensitäten aller Komponenten berechnen. Man zeigt leicht, dass

$$\Sigma(x+iy)^2 = \Sigma(x-iy)^2 = 2\Sigma z^2.$$

Die Summation erstreckt sich in jedem einzelnen Falle über alle möglichen Werte von m . So haben wir für den Übergang $k \rightarrow k-1$ für $k=3$

$$x+iy, m \text{ durchläuft die Zahlen } 2, 1, \dots -1$$

$$\text{oder } (k-1), k-2, \dots$$

$$z, m \text{ durchläuft die Zahlen } (k-2) \dots$$

$$x-iy, m \text{ ,, ,, ,, } (k-3) \dots$$

Die Gesamtintensität ist proportional

$$\begin{aligned} & \Sigma(x+iy)^2 + \Sigma z^2 \\ \text{oder} & \Sigma(x-iy)^2 + \Sigma z^2 \\ \text{oder} & = 3\Sigma z^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Tabelle 1

Übergang	\bar{z}	$x+iy$	$x-iy$	F_k^k
$k \rightarrow k-1$	$\sqrt{(k+m)(k-m-1)}$	$\sqrt{(k-m-1)(k-m-2)}$	$\sqrt{(k+m)(k+m-1)}$	$\left\{ \left[\frac{ n_r}{(n+k-1)^3} \frac{ n'_r}{(n'+k-2)^3} \right]^{1/2} \frac{2^{2k-1}S}{n^{k+1}n'^k} \right\} \frac{a}{2k-1}$
$-k \rightarrow -k+1$	$\sqrt{(k+m)(k-m-1)}$	$\sqrt{(k-m-1)(k-m-2)}$	$\sqrt{(k+m)(k+m-1)}$	$\left\{ \left[\frac{ n_r}{(n+k)^3} \frac{ n'_r}{(n'+k-1)^3} \right]^{1/2} \frac{2^{2k+1}S}{n^{k+2}n'^{k+1}} \right\} \frac{a}{2k-1}$
$k \rightarrow k+1$	$\sqrt{(k-m)(k+m+1)}$	$\sqrt{(k+m+1)(k+m+2)}$	$\sqrt{(k-m)(k-m+1)}$	$\left\{ \left[\frac{ n_r}{(n+k-1)^3} \frac{ n'_r}{(n'+k)^3} \right]^{1/2} \frac{2^{2k+1}S}{n^{k+1}n'^{k+2}} \right\} \frac{a}{2k+1}$
$-k \rightarrow -k-1$	$\sqrt{(k-m)(k+m+1)}$	$\sqrt{(k+m+1)(k+m+2)}$	$\sqrt{(k-m)(k-m+1)}$	$\left\{ \left[\frac{ n_r}{(n+k)^3} \frac{ n'_r}{(n'+k+1)^3} \right]^{1/2} \frac{2^{2k+3}S}{n^{k+2}n'^{k+3}} \right\} \frac{a}{2k+1}$
$k \rightarrow -k$	$m + \frac{1}{2}$	$\sqrt{(k+m+1)(k-m-1)}$	$\sqrt{(k+m)(k-m)}$	$\left\{ \left[\frac{ n_r}{(n+k-1)^3} \frac{ n'_r}{(n'+k)^3} \right]^{1/2} \frac{2^{2+1}S}{n^{k+1}n'^{k+2}} \right\} \frac{a}{(2k-1)(2k+1)}$
$-k \rightarrow k$	$m + \frac{1}{2}$	$\sqrt{(k+m+1)(k-m-1)}$	$\sqrt{(k+m)(k-m)}$	$\left\{ \left[\frac{ n_r}{(n+k)^3} \frac{ n'_r}{(n'+k-1)^3} \right]^{1/2} \frac{2^{2k+1}S}{n^{k+2}n'^{k+1}} \right\} \frac{a}{(2k-1)(2k+1)}$

Daher ist die Intensität jeder Linie, sagen wir $k \rightarrow k-1$, durch den Ausdruck

$$\{F_k^{k-1}\}^2 \cdot f(k)$$

gegeben, wenn

$$f(k) = 3\Sigma(k+m)(k-m-1) \dots \text{usw.}$$

Es folgen die Werte für $f(k)$ für die verschiedenen Übergänge:

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} k \rightarrow k-1 \\ -k \rightarrow -k+1 \end{array} \right\} \dots 2k(k-1)(2k-1), \\ \left. \begin{array}{l} k \rightarrow -k \\ -k \rightarrow k \end{array} \right\} \dots 2k(2k+1)(2k-1), \\ \left. \begin{array}{l} k \rightarrow k+1 \\ -k \rightarrow -k-1 \end{array} \right\} \dots 2k(k+1)(2k+1). \end{array} \right\} \quad (19)$$

Numerische Berechnung der Intensitäten. Zur Veranschaulichung schreiben wir die Intensitäten für die Komponenten (1, 4, 2), die das $2P-3D$ -Multipllett bilden, voll aus¹³:

$$I_1 = \left\{ \left[\frac{|n_r}{(n+k-1)^3} \cdot \frac{|n'_r}{(n'+k'-1)^3} \right]^{1/2} \frac{2^{2k-1}}{n^{k+1} n'^k} S \right\}^2 \cdot \frac{a^2}{(2k-1)^2} 2k(2k-1)(k-1).$$

Hier ist $n_r=0$, $n'_r=0$, $n=3$, $n'=2$, $k=3$, $k'=2$, und

$$S = \int e^{-\frac{5s}{6}} L_{n+k-1}^{2k-1} \left(\frac{2s}{3}\right) L_{n'+k'-1}^{2k'-1} \left(\frac{2s}{2}\right) s^{k+k'-1} ds \\ = \int e^{-\frac{5s}{6}} L_5^5 \left(\frac{2s}{3}\right) L_3^3 \left(\frac{2s}{3}\right) s^6 ds.$$

Nun gilt

$$L_5^5 \left(\frac{2s}{3}\right) = 5!, \quad L_3^3 \left(\frac{2s}{3}\right) = 3!;$$

daher ist

$$S = \int e^{-\frac{5s}{6}} 5! 3! s^6 \cdot ds \\ = 5! 3! 6! \left(\frac{6}{5}\right)^7.$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte ergibt sich

$$I_1 = \frac{2^{10}}{3^5} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{14} \cdot a^2.$$

Zum wirklichen Vergleich wollen wir $(\frac{6}{5})^{14}$ fortlassen, da es gemeinsamer Faktor aller Ausdrücke ist.

Für I_2 , Übergang von -2 nach 2 haben wir

$$I_2 = \left\{ \left[\frac{|n_r}{(n+k)^3} \cdot \frac{|n'_r}{(n'+k'-1)^3} \right]^{1/2} \frac{2^{2k+1}}{n^{k+2} n'^{k+1}} S \right\} \cdot \frac{2ka^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

mit

$$n_r=0, \quad n'_r=0, \quad k=2, \quad k'=2.$$

Daher ist der Ausdruck in der geschweiften Klammer derselbe in beiden Fällen, da S denselben Wert wie in I_1 hat.

Für I_4 , Übergang von $k=-2$ nach $k=-1$, haben wir

$$I_4 = \left\{ \left[\frac{|n_r}{(n+k)^3} \cdot \frac{|n'_r}{(n'+k-1)^3} \right]^{1/2} \frac{2^{2k+1} S}{n^{k+2} n'^{k+1}} \right\} \cdot \frac{a^2}{(2k-1)^2} 2k(2k-1)(k-1)$$

$k=2$, $n_r=0$, $n'_r=0$, S hat denselben Wert. Der Ausdruck in der geschweiften Klammer hat denselben Wert wie in I_1 und I_2 .

Wir haben also

$$\begin{array}{l} I_1 \quad : \quad I_2 \quad : \quad I_4 \\ = \left[\frac{2k(k-1)}{2k-1} \right]_{k=3} : \left[\frac{2k}{(2k-1)(2k+1)} \right]_{k=2} : \left[\frac{2k(k-1)}{2k-1} \right]_{k=2} \\ = \frac{6 \cdot 2}{5} \quad : \quad \frac{4}{3 \cdot 5} \quad : \quad \frac{4 \cdot 1}{3} \\ = 9 \quad : \quad 1 \quad : \quad 5. \end{array}$$

Das Ergebnis steht mit dem Ornstein-Burger-Sommerfeldschen Gesetz für die Intensitätsverteilung auf die ein $2P-3D$ -Multipllett bildenden Linien in völliger Übereinstimmung.

Man kann auch leicht sehen, dass die Komponenten der Linien $2S-3P$ und $2P-3S$ ebenfalls mit der Ornstein-Burger-Sommerfeldschen Regel in bester Übereinstimmung stehen.

Wir wollen jetzt die Verhältnisse der Intensitätseinheiten in den drei Multipletts suchen.

Nach einiger Rechnung ergibt sich

$$\begin{array}{l} I_{PD} \quad : \quad I_{SP} \quad : \quad I_{PS} \\ = \frac{I_1}{9} \quad : \quad \frac{I_5}{2} \quad : \quad \frac{I_3}{2} \\ = 1 \quad : \quad 1,04 \quad : \quad 1,024 \end{array}$$

Wir können nun die nach diesen Ergebnissen berechneten Intensitäten für die Komponenten von H_a mit den gefundenen in Fig. 2 vergleichen, die eine Darstellung der Hansenschen Beobachtungen bringt.

Man sieht, dass $I_V/I_R=7,08/9$ ist, während die Beobachtung für die violette Komponente eine etwas grössere Intensität als für die rote liefert. Das Ergebnis stimmt also mit den Versuchsergebnissen nicht überein, wenn auch die Abweichung nicht gross ist. Sowohl die violette als auch die rote Komponente erweisen sich als etwas asymmetrisch, was wahrscheinlich auf das Vorhandensein von (6) mit der Intensität 1,08 in einer Entfernung von 0,047 Å rechts von der violetten Komponente und von (2) mit der Intensität 1 in einem Abstand von 0,047 Å rechts von der roten Komponente zurückzuführen ist. Die

¹³ $|n$ bedeutet $n!$

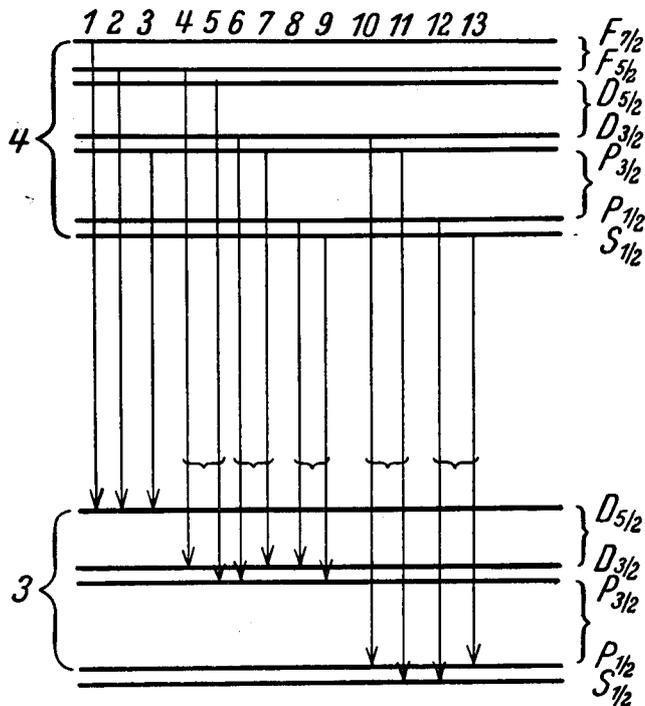


FIG. 4

Komponenten (3) und (7) sind nicht in Betracht gezogen worden, weil sie nur sehr geringe Intensitäten haben.

Die He⁺-Linie λ=4686. Man kann zeigen, dass die He⁺-Linie λ=4686 aus den folgenden Multipletts besteht (Fig. 4):

- Das 3 D — 4 F-Multiplett besteht aus (1, 2, 4)
- „ 3 P — 4 D- „ „ (5, 6, 10)
- „ 3 S — 4 P- „ „ (11, 12)
- „ 3 D — 4 P- „ „ (3, 7, 9)
- „ 3 P — 4 S- „ „ (9, 13)

Die Intensitätsverhältnisse in irgendeinem dieser Multipletts nach der Ornstein-Burger-Sommerfeldschen Regel sind durch die mittleren Zahlen angedeutet. So bilden (1, 2, 4) das 3D—4F-Multiplett; die theoretischen Intensitäten sollten sich wie 20:1:14 verhalten; die Goldsteinschen Zahlen sind in diesem Falle nicht wiedergegeben, da sie offensichtlich falsch sind.

Man sieht leicht, dass die Ornstein-Burger-Sommerfeldsche Regel unter den Komponenten eines Multipletts erfüllt ist. Wir wählen das 3D—4F-Multiplett: Wir haben

$$\left[\frac{2k(k-1)}{2k-1} \right]_{k=4} : \left[\frac{2k}{(2k-1)(2k+1)} \right]_{k=3} : \left[\frac{2k(k-1)}{2k-1} \right]_{k=3}$$

$$\frac{8 \cdot 3}{7} : \frac{6}{5 \cdot 7} : \frac{6 \cdot 2}{5}$$

$$20 : 1 : 14$$

in völliger Übereinstimmung mit der genannten Regel. Ähnlich ist sie auch für die übrigen Multipletts gültig.

Verhältnis der Intensitätseinheiten zwischen den einzelnen Multipletts. Eine kleine Rechnung zeigt, dass sich die Verhältnisse der Intensitätseinheiten in den fünf Multipletts folgendermassen ausdrücken lassen:

$$3 D - 4 F : 3 P - 4 D : 3 S - 4 P : 3 D - 4 P : 3 P - 4 S$$

$$1 : 0,85 : 1,11 : 0,025 : 0,225$$

Diese Zahlen stimmen mit den von Sommerfeld und Unsöld gefundenen überein; diese Autoren haben auch gezeigt, dass sie die neuen Paschenschen Beobachtungen an den Feinstrukturkomponenten der He⁺-Linie 4686 vollständig erklären.

Um vergleichen zu können, geben wir die Paschenschen Ergebnisse wieder:

Tabelle 2.

Komponente	Wellenlänge	Intensität ber.	Intensität (Paschen)
3	5,924	0,225 (9·0,025)	? ist vorhanden
verboten	5,890	—	—
1	5,810	20	7
(4,5)	5,710	21,75 (14+9·0,85)	7,5
(12,13)	5,544	1,33 (1,11+0,22)	1
(10,11)	5,384	6,488 (5·0,85+2·1,11)	3

Die Zahlen stammen aus der Paschenschen Arbeit l.c.

Zusammenfassung. Für die Feinstrukturkomponenten von H_α und He⁺-Linie λ 4686 sind die Übergangswahrscheinlichkeiten unter Verwend der Diracschen Theorie des Elektrons in der Darwin-Weylschen Stellung berechnet worden. Die Ornstein-Burger-Sommerfeldsche Regel für die relativen Intensitäten der ein Multiplett bildenden Komponenten wird aus der Diracschen Theorie abgeleitet. Entgegen den Goldsteinschen Ergebnissen erweist sich die Intensitätsverteilung auf die Feinstrukturkomponenten in guter Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen, wie schon Sommerfeld und Ornstein gezeigt haben, indem sie von der Schrödingerschen Form der Wellenmechanik und statistischen Betrachtungen ausgingen.

Zusatz bei der Korrektur. Etwa 1 1/2 Monate, nachdem wir diese Arbeit zum Druck geschickt hatten, erreichte uns eine Arbeit von K. Bechert¹⁴ Über „Die Intensitäten von Dublettlinien nach der Diracschen Theorie“. Bechert behandelt dieselbe Frage und kommt zu genau den gleichen Ergebnissen. Wir müssen nur hinzufügen, dass wir die Intensitäten der Röntgenlinien berechnet haben, wie es

¹⁴ Ann. d. Phys. 6; 700; ausgegeben am 25. September 1930.

auch Bechert im zweiten Teil seiner Arbeit versucht. Der erste Versuch in dieser Richtung stammt von Wentzel¹⁵ in Anlehnung an die Schrödingersche Theorie, und durch diese Arbeit sind Sommerfeld und Unsöld auf die Berechnung der Intensitäten der $H\alpha$ -Komponenten gekommen. Wentzel fand beträchtliche Abweichungen der berechneten Intensitäten von den Versuchsergebnissen von Jönsson und Allison. Man nahm an, dass die Anwendung der Diracschen Theorie diese Unterschiede beseitigen würde. Bei den in dieser Arbeit ausgeführten Berechnungen von (r) vernachlässigten wir $|W| = \alpha Z \cdot |V|$, weil $\alpha = 1/137$ sehr klein ist. Für Röntgenstrahlen liegt aber αZ für die Elemente von Ag bis U zwischen $1/3$ und $2/3$, weswegen W nicht zu vernachlässigen ist. Wir haben für Ag und U Berechnungen angestellt; die berechneten Intensitäten stimmen aber im allgemeinen mit den experimentell beobachteten Werten nicht überein. Der Umstand, dass die Röntgen- und Alkalispektren gleich gebaut sind, hat oft zu der falschen Auffassung geführt, dass sie auf gleiche Art entstehen. Sowohl Wentzel wie Saha und Ray¹⁶ haben auf das

Irreführende dieser Analogie hingewiesen, da ja die Röntgen-niveaus durch das *Fehlen* eines Elektrons in den abgescheuerten Schalen entstehen, während die optischen Niveaus der Alkalmetalle von einem einzelnen ausserhalb der abgeschlossenen Schalen schwingenden Elektron herrühren. Zweitens hängen die Intensitäten der verschiedenen Röntgenlinien, abgesehen von den Übergangswahrscheinlichkeiten, auch von der Wahrscheinlichkeit der Entfernung eines Elektrons aus der $L_1(2s)$ - oder $L_2(2p)$ -Schale durch das äussere Elektronen-bombardement ab. Aber selbst, wenn sich diese beiden Faktoren berücksichtigen liessen, müssten noch weitere Anomalien, wie die Abweichung der Intensitätsverhältnisse der Komponenten irgendeines Multipletts von der Ornstein-Burger-Sommerfeld-Regel erklärt werden (so sollte sich z. B. $\beta_3 : \beta_4$ wie 2:1 verhalten, während es bei U gleich 1:1 ist). Diese Anomalien sind ähnlich den für die Komponenten der höheren Hauptserienglieder bei den Alkalimetallen beobachteten¹⁷ und haben wahrscheinlich dieselben Ursachen (Tauchbahnen).

¹⁵ *Naturwiss.* **14**, 1926.

¹⁶ *Phys. Zeit.* **28**, 221, 1927.

¹⁷ Vgl. Sambursky. *Zeit. f. Phys.* **49**, 731, 1928, und E. Fermi, *ebenda*, **59**, 680, 1930.

50. THE SPIN OF THE PHOTON

M. N. SAHA AND Y. BHARGAVA

(*Nature*, **128**, 817, 1931)

Recently a number of papers have appeared on the question as to whether the phenomena of polarisation of light can be explained by the assumption of a 'spin' of the photon.¹ Kastler and Frisch deduce from their experiments that the photon possesses no spin, and Kastler argues further that the phenomena of polarisation should be explained on statistical grounds. Raman and Bhagavantam, on the other hand, argue that the interesting results obtained by Bär and Hanle² on the reversal of the state of polarisation of Raman lines when observed in the direction of propagation of the primary beam can be explained only on the assumption that the photons possess spin. They seem to link circular polarisation definitely with a spin of the photon about the line of propagation.

The arguments of Frisch and Kastler are based upon the Sommerfeld-Rubinowicz explanation of the selection principle for the azimuthal quantum number (principle of conservation of angular momentum of atom plus photon), but applying the same principle, and the principle that the atom-magnet can orient itself in any direction making

certain definite quantised angles with the external field (as proved by Stern and Gerlach's experiment), it can be shown that the absorption of Zeeman components can never disappear with reversal of the field, but it will be modified on passing through two fields, whether parallel or antiparallel. Hence the experiments of Frisch or Kastler cannot be interpreted in the way supposed by them and show no light on the question of the spin. Secondly, and this is more important, a discussion of the Zeeman effect of the π -components of the D_1 line, assuming that the principle of conservation of angular momentum holds during radiation, shows that there may be photons without any 'spin' whatsoever, although they may show polarisation. It therefore seems unjustifiable to describe polarisation with the aid of a 'spin'. It appears that Bär and Hanle's results should be explained in some other way than that proposed by Raman and Bhagavantam.

A full discussion will appear later.

Physical Laboratory,
Allahabad, India,

Oct. 14

¹ Frisch, *Zeit. für Physik*, vol. 61, p. 626; Kastler, *Jour. de Physique*, May 1931; Raman and Bhagavantam, *Nature*, **128**, July 18, 1931.

² *Naturwiss.*, vol. 19, p. 463, 375; 1931.